

## Suma de las potencias $p$ -ésimas de los primeros $n$ números naturales

Sean  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $n \in \mathbb{N}$ :

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} (T_0 n^{-0} - T_1 n^{-1} + T_2 n^{-2} - \dots + (-1)^p T_p n^{-p})$$

Donde,

$$T_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -\frac{a_0(k)T_0 + a_1(k)T_1 + \dots + a_{k-1}(k)T_{k-1}}{a_k(k)}, & 0 < k \leq p \end{cases}$$

Además, para  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $k \in \mathbb{N}$ , con  $i \leq k$ :

$$a_i(k) = \binom{p+1-i}{k+1-i}$$

También,

$$T_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -\frac{a_0(1)T_0}{a_1(1)}, & k = 1 \\ -\frac{a_0(2)T_0 + a_1(2)T_1}{a_2(2)}, & k = 2 \\ -\frac{a_0(k)T_0 + a_1(k)T_1 + a_2(k)T_2 + a_4(k)T_4 + \dots + a_{k-2}(k)T_{k-2}}{a_k(k)}, & k(> 2) \text{ es par} \\ 0, & k(> 1) \text{ es impar} \end{cases}$$